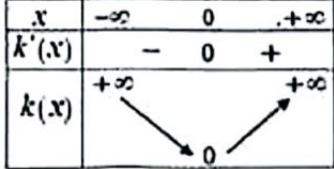


الإجابة النموذجية / مادة: الرياضيات / الشعبة: رياضيات / بكالوريا 2025

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)									
العلامة	مجزأة										
التمرين الأول (04 نقاط)											
0,75	0,75	شجرة الاحتمالات:	(1)								
2	0,25 × 4	$P(B \cup C) = \frac{127}{462}$, $P(D) = \frac{335}{462}$, $P(C) = \frac{2}{11}$, $P(B) = \frac{43}{462}$ (أ)	(2)								
	0,5	$P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{12}{44} + \frac{2}{3} \times \frac{29}{44} = \frac{41}{66}$ (ب)									
	0,5	$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{287}{419}$ (ج)									
1.25	0,25 × 5	<table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$P(X = x_i)$</td> <td>$\frac{43}{462}$</td> <td>$\frac{335}{462}$</td> <td>$\frac{84}{462}$</td> </tr> </table> $x_i \in \{1; 2; 3\}$ $E(X) = \frac{965}{462}$	x_i	1	2	3	$P(X = x_i)$	$\frac{43}{462}$	$\frac{335}{462}$	$\frac{84}{462}$	(3)
x_i	1	2	3								
$P(X = x_i)$	$\frac{43}{462}$	$\frac{335}{462}$	$\frac{84}{462}$								
التمرين الثاني (04 نقاط)											
1	0,25 × 4	$S = \{-i; i; 3-2i; 3+2i\}$	(1)								
2,25	0,25 × 2	$z_A - z_C = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$ (أ) $z_B - z_C = 3\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$ (2)	(2)								
	0,25 × 3	(ب) $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $ L = \frac{2}{3}$ ، المثلث ABC قائم في C									
	0,25 × 2	(ج) النقطة A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها ω منتصف [AB] لاحقته $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{26}}{2}$ بما أن: $\omega O = \frac{\sqrt{26}}{2}$ فإن O تنتمي إلى الدائرة (C)	(3)								
	0,25 0,25	$S_n = L ^1 + \dots + L ^n = L ^0 + L ^1 + \dots + L ^n - 1 = 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$ (د) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$									
0,75	0,25	لدينا: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ و $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ ومنه: $z_0 = 2\cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta)$	(3)								

	0,25	$\arg(z_0) = -\theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ و $ z_0 = 2 \cos \theta$ فإن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ لما:															
	0,25	$\arg(z_0) = \pi - \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ و $ z_0 = -2 \cos \theta$ فإن $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ لما:															
التمرين الثالث (05 نقاط)																	
1,25	0,5 + 0,25	(أ) تبيان أن: $y \equiv 2[13]$ ومنه: $k \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = 13k + 2 \end{cases}$	(1)														
	0,5	(ب) $PGCD(x; y) = 35$ يعني 35 يقسم x و 35 يقسم y ومنه: $k = 35k' - 19$ وعليه: $k' \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} x = 70k' + 35 \\ y = 455k' + 210 \end{cases}$															
1,5	0,75	(أ) <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>$n =$</td> <td>$5k$</td> <td>$5k + 1$</td> <td>$5k + 2$</td> <td>$5k + 3$</td> <td>$5k + 4$</td> <td>$k \in \mathbb{N}$</td> </tr> <tr> <td>$5^n \equiv$</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>[11]</td> </tr> </table>	$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	$k \in \mathbb{N}$	$5^n \equiv$	1	5	3	4	9	[11]	(2)
	$n =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	$k \in \mathbb{N}$										
$5^n \equiv$	1	5	3	4	9	[11]											
0,25 0,25 × 2	(ب) $k \in \mathbb{N}$ و $1446^{x+y} \equiv 5^{5(3k+1)}[11]$, $1446 \equiv 5[11]$ $6n^2 + 1446^{x+y} \equiv 0[11]$ يكافئ: $6n^2 + 1 \equiv 0[11]$ أي: $n^2 \equiv 9[11]$ ومنه: $n = 11\gamma + 3$ أو $n = 11\gamma + 8$ مع $\gamma \in \mathbb{N}$																
1,25	0,5 0,25 × 3	(3) لدينا: $\begin{cases} \lambda = 20\beta + 320\alpha + 1025 \\ \lambda = 216\alpha + 36\beta + 1305 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} 13\alpha - 2\beta = 35 \\ 0 \leq \alpha < 4; 0 \leq \beta < 4 \end{cases}$ نستنتج أن: $(\alpha; \beta) = (3; 2)$ و $\lambda = 2025$	(3)														
1	0,25	$2025 = 3^4 \times 5^2$	(4)														
	0,25	$d^4 [7(a'b')^2 - 3] = 2025$ تكافئ: $7(ab)^2 - 3d^4 = 2025$															
	0,25	مع $PGCD(a'; b') = 1$ ومنه: $d \in \{1; 3\}$															
	0,25	لما $d = 1$: ينتج $7(a'b')^2 = 2028$ ، ليس للمعادلة حل طبيعي. لما $d = 3$: ينتج $a'b' = 2$ ومنه: $(a; b) \in \{(3; 6), (6; 3)\}$															
التمرين الرابع (07 نقاط)																	
1	0,25 × 2	(I) من أجل كل عدد حقيقي X ، $g'(x) = (1+x)e^x$ ، إشارة $g'(x)$	(1)														
	0,25	الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ ومتزايدة تماما على $[-1; +\infty[$															
	0,25	$g(-1) = 1 - e^{-1}$ ونستنتج أنه: من أجل كل عدد حقيقي X ، $1 + xe^x > 0$															
0,75	0,25	(أ) إشارة $h(x)$: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>α</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	$h(x)$	+	0	-	+	(2)				
	x	$-\infty$	α	0	$+\infty$												
$h(x)$	+	0	-	+													
0,25 × 2	(ب) لدينا: $h(-0,6) \simeq 0,03$ و $h(-0,7) \simeq -0,02$ ومنه: $-0,7 < \alpha < -0,6$																

2	0,25 × 2	(أ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	(II) (1)
	0,25	(ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x+2)) = 0$ ، (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$	
	0,25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$ ، (Δ') مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$	
	0,5	(ج) لدينا: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - (2x+2) = -\frac{2(x+1)e^x}{1+xe^x}$ ، لما $x = -1$: (Δ) يقطع (C_f) في $A(-1; 0)$ لما $x < -1$: (C_f) أعلى (Δ) ولما $x > -1$: (C_f) أسفل (Δ) ولدينا: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - 2x = \frac{2 - 2e^x}{1+xe^x}$ ، لما $x = 0$: (Δ') يقطع (C_f) في $O(0; 0)$ لما $x < 0$: (C_f) أعلى (Δ') ولما $x > 0$: (C_f) أسفل (Δ')	
1,25	0,5	(أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2h(x)}{(1+xe^x)^2}$	(2)
	0,5	(ب) الدالة f متناقصة تماما على $[\alpha; 0]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; \alpha[$ و $]0; +\infty[$	
	0,25	جدول التغيرات: 	
1	0,25 × 2	رسم (Δ) ، (Δ')	(3)
	0,5	رسم (C_f) 	
0,5	0,25	(أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 - \frac{1 - e^x}{1 + xe^x} = \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x}$	(4)
	0,25	(ب) $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{2(x+1)e^x}{1+xe^x} dx = 8 \ln(e+1) \text{ cm}^2$	
0,5	0,25	$k'(x) = 2x f'(x^2)$ الدالة k متناقصة تماما على $]-\infty; 0[$ ومتزايدة تماما على $]0; +\infty[$	(5)
		جدول التغيرات:	
	0,25		

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
العلامة	مجزأة	
التمرين الأول (04 نقاط)		
1	0,5 0,25×2	(1) (أ) من أجل كل x من $[-1; -\frac{1}{2}]$ ، $f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$ ، إشارة $f'(x)$ ، الدالة f متزايدة تماما على $[-1; -\frac{1}{2}]$
1,25	0,5+0,25	(أ) البرهان بالتراجع.
	0,5	(2) (ب) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2(u_n + 1)}{u_n^2 + 1}$ ، (u_n) متناقصة تماما.
1	0,5	(3) (أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} + 1 = \frac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$ ، ولدينا: $\frac{1}{2} < \frac{1}{u_n^2 + 1} \leq \frac{4}{5}$ ومنه: $u_{n+1} + 1 \leq \frac{4}{5}(u_n + 1)$
	0,25 0,25	(ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n + 1 \leq \frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$
0,75	0,25+0,5	(4) تبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ ، $S_n \leq -2(\frac{4}{5})^n - n + \frac{3}{2}$
التمرين الثاني (04 نقاط)		
0,75	0,25×3	(1) $S = \{-2 - i; 2 - i; 2 + i\}$
2,5	0,5+0,25 0,5	(2) (أ) $L = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ، $L = 2i$ المثلث ABC قائم في A
	0,25 0,5	(ب) $ Z_A = Z_B = Z_C = \sqrt{5}$ ومنه: النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{5}$
	0,25×2	(ج) $Z_D = 2 - 3i$ تكافئ $\frac{Z_B + Z_D}{2} = Z_A$ ، $Z_E = 6 - i$ تكافئ $\frac{Z_C + Z_E}{2} = Z_A$

0,75	0,25	لدينا: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$ ومنه: $z_0 = 2\sin\theta(\sin\theta + i\cos\theta)$ $z_0 = 2\sin\theta\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$ من أجل $\arg(z_0) = \frac{3\pi}{2} - \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $z_0 = -2\sin\theta : -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ من أجل $\arg(z_0) = \frac{\pi}{2} - \theta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ و $z_0 = 2\sin\theta : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	(3)	
التمرين الثالث (05 نقاط)				
1,5	0,25×3	(أ) $PGCD(116; 81) = 1$ ومنه: $81 = 3^4$ ، $116 = 2^2 \times 29$ (ب) $(x; y) = (81k + 7; 116k + 10); k \in \mathbb{Z}$	(1)	
2,5	0,25	(أ) $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^0 \equiv 1[9]$	(2)	
	0,75	من أجل كل عدد طبيعي k : $7^{3k+2} \equiv 4[9]$ ، $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ ، $7^{3k} \equiv 1[9]$		
	0,25×3	(ب) من أجل $n = 3k$: $7^{2n+1} \equiv 7[9]$ ، من أجل $n = 3k+1$: $7^{2n+1} \equiv 1[9]$ ، من أجل $n = 3k+2$: $7^{2n+1} \equiv 4[9]$ ، (ج) $x^y \equiv 4[9]$ تكافئ: $k = 3k' + 2; k' \in \mathbb{N}$ ومنه: $(x; y) = (243k + 169; 348k + 242); k \in \mathbb{N}$		
1	0,25×2	(أ) إذا كان d قاسما للعددين a ، b فإن d يقسم $5a - 7b$ و $3b - 2a$	(3)	
	0,25×2	وبالتالي d يقسم العددين α ، β ومنه: a ، b أوليان فيما بينهما.		
(ب) $\beta = 5a - 7b = 13$ ، $\alpha = 3b - 2a = 11$				
التمرين الرابع (07 نقاط)				
1,25	0,25	(I) g سالبة تماما على $]0; +\infty[$	(1)	
	0,5	h موجبة تماما على $]0; \alpha[$ و سالبة تماما على $]\alpha; +\infty[$ ، $h(\alpha) = 0$		
	0,25×2	$h(1,7) \simeq 0,18$ و $h(1,8) \simeq -0,15$ ومنه: $1,7 < \alpha < 1,8$		
1,5	0,25×2	(II) (أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	(1)	
	0,5	(ب) من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$		
	0,25	(ج) الدالة f متناقصة تماما على $]0; +\infty[$		
	0,25	جدول التغيرات:		

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

1	0,5 0,25×2	$f'(x) = -1$ تكافئ $x=4$ أو $x=1$ (T): $y = -x + 4 - 8\ln 2 + 8(\ln 2)^2$ ، (T'): $y = -x + 1$	(2)
0,5	0,25 0,25	أ) من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ ب) f'' تنعدم وتغير إشارتها عند α و $B(\alpha; f(\alpha))$ نقطة انعطاف	(3)
1,25	0,25 0,25×2 0,5	$f(e^2) = 8 - 2e^2$ رسم (T) ، (T') رسم (C _f)	(4)
1	0,25 0,5 0,25	أ) من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $k'(x) = (\ln x)^2$ ب) $\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$ ج) $\mathcal{A} = \int_1^e -f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4} - 2(k(e) - k(1)) = \frac{e^2 - 8e + 17}{4} \text{ u.a}$	(5)
0,5	0,25 0,25	من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ الدالة φ متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ جدول التغيرات:	(6)

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+
$\varphi(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحل الصحيحة مع التقيد بسلم التنقيط.